数理解析研究所講究録
76巻 1969年 21-23

Bethe-Salpeter方程式の固有値が実数であることの証明

京大 数研　中 西 襄

この仕事は内藤清一氏との共著論文"Reality of the Eigenvalues of the Bethe-Salpeter Equation"(RIMS 52, Progress of Theoretical Physicsに投稿)に詳しいので,ここではごく概略のみを報告する.

例えば,質量がそれぞれ m_1, m_2 の2つのスカラー粒子が,質量 μ のスカラー粒子を交換する ladder model の Bethe-Salpeter (B-S) 方程式を考える. Wick rotation[1] を行なえば, B-S 方程式は

$$K(\mathbf{p}, p_4)\,\phi(\mathbf{p}, p_4) = \lambda \int d^3\mathbf{p}' \int dp_4'\, I(\mathbf{p}, p_4; \mathbf{p}', p_4')\,\phi(\mathbf{p}', p_4') \tag{1}$$

となる. ここに $\lambda = g^2/(4\pi)^2$ は固有値, ϕ は B-S 振巾,

$$K(\mathbf{p}, p_4) \equiv [m_1^2 + \mathbf{p}^2 - (\eta_1\sqrt{s} + ip_4)^2]\,[m_2^2 + \mathbf{p}^2 - (\eta_2\sqrt{s} - ip_4)^2],$$

$$I(\mathbf{p}, p_4; \mathbf{p}', p_4') \equiv \pi^{-2}\,[\mu^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 + (p_4 - p_4')^2]^{-1} \tag{2}$$

で，$\eta_j = m_j/(m_1+m_2)$，$\sqrt{s}$ は束縛状態のエネルギーである．$m_1 = m_2$ のときは $K>0$ となるから直ちに Hilbert-Schmidt 型の積分方程式に変換ができ，固有値 λ は実数かつ正であることは明らかである．ところが，$m_1 \neq m_2$ のときは K はもはや実数でないから，λ がこのときも実数であるかどうかは問題である．最近 Cutkosky-Deo[2] が数値計算で，(1) を Regge 化したときに得られる Regge trajectory が複素数になりうることを示したので，この問題はとくに興味がある．

λ が実数であることを証明するには，(2) から直ちに導かれる次の3つの性質を用いる（$*$ は複素共役）：

$$K^*(\boldsymbol{p}, p_4) = K(\boldsymbol{p}, -p_4),$$

$$I^*(\boldsymbol{p}, p_4; \boldsymbol{p}', p_4') = I(\boldsymbol{p}, -p_4; \boldsymbol{p}', -p_4'),$$

$$I(\boldsymbol{p}', p_4'; \boldsymbol{p}, p_4) = I(\boldsymbol{p}, p_4; \boldsymbol{p}', p_4'). \tag{3}$$

証明の方法は次の通りである．(1) に $\phi^*(\boldsymbol{p}, -p_4)$ をかけて，$\boldsymbol{p}$，p_4 につき積分する（積分は収束する）．この等式の複素共役をとり (3) の性質を考慮すると，両辺の積分は実は複素共役をとる前の式のそれらと全く同じであることが分る．従ってそれらの積分が 0 でなければ，$\lambda = \lambda^*$，すなわち λ が実数であることが分る．積分が 0 になる場合も今考えている model では実は心配しなくてもよいことがいえ，λ が実数であるという証明が

完結する.

この結果と,最近荒船氏[3]が証明した $Re\,\lambda > 0$ とを組合せると $\lambda > 0$ が得られる. また λ が実数であることから, s の関数として $s < (m_1 + m_2)^2$ で branch point をもたないことが分る.

上記の固有値が実数であることの証明は,実は ladder model の時間反転不変性に基くものであるので,積分が ∞ または 0 になる場合の吟味の点を除けば,他の model の場合にも容易に拡張できる. K, I が matrix のときは,(3) の性質は複素共役の代りに適当な共役操作をとればやはり成立する.

[なお, 講演の際, Regge 化したとき Cutkosky-Deo[2] の現象が起るのは同じ B-S 量子数をもつ trajectory の間でだけであると言ったが,これは固有値 $\lambda_\ell(s)$ が ℓ について正則であることがいえていないので,正しくない結論だったので取消する.]

文献

1) G. C. Wick, Phys. Rev. 96 (1954), 1124

2) R. E. Cutkosky and B. B. Deo, Phys. Rev. Letters 19 (1967), 1256.

3) J. Arafune, Prog. Theor. Phys. 41 (1969), to be published.